Lezione 6

Calcolo di Malliavin e processi Gaussiani isonormali

$(H, \langle \cdot,\cdot \rangle_H)$ sp di Hilbert reale separabile

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp di probabilità

Definizione

Un processo Gaussiano isonormale $X = \{ X(h), h \in H \}$ su $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle_H)$ e' un processo Gaussiano centrato su H t.c.

$$\mathbb{E}[X(h)X(g)] = \langle h, g \rangle_H \quad \forall h, g \in H$$

Supponiamo da ora in poi che $\mathcal{F} = \sigma(X)$.

Definizione

Sia $q = 0, 1, 2, \dots$ Il q-esimo caos di Wiener C_q e' definito come segue

$$C_q := \overline{\operatorname{span}\{ H_q(X(h)), h \in H, \|h\|_H = 1 \}}^{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{P})}}$$

con $H_q(x) = (-1)^q e^{x^2/2} \dfrac{d^q}{dx^q} e^{-x^2/2}$, $q = 1, 2, \dots$ polinomi di Hermite

$H_0 \equiv 1$

Teorema Si ha

$$L^2(\mathbb{P}) = \bigoplus_{q=0}^{+\infty} C_q$$

decomposizione caotica di Wiener-Itô

Ossia, data $F \in L^2(\mathbb{P})$, (2)

$$F = \sum_{q=0}^{+\infty} F_q \, , \quad \text{con } F_q = \mathrm{proj}(F \mid C_q) = J_q(F)$$

serie converge in $L^2(\mathbb{P})$.

$C_0 = \mathbb{R}$, $\mathrm{proj}(F \mid C_0) = \mathbb{E}[F]$

Derivata di Malliavin

Sia S l'insieme delle s.a. semplici della forma

$$F = f(X(h_1), \ldots, X(h_m))$$

con $m \geq 1$, $h_i \in H$ $i = 1, \ldots, m$, $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ C_p^∞.

Definizione Per $F \in S$, $p = 1, 2, \ldots$, la derivata di Malliavin di F di ordine p e'

$$D^p F := \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{m} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}} (X(h_1), \ldots, X(h_m)) \, h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_p}$$

$D^p F$ e' una s.a. a valori in $H^{\odot p}$, $D^p F \in L^q(\mathbb{P}; H^{\odot p})$

$\{ V : \Omega \to H^{\odot p} \text{ t.c. } \mathbb{E}[\|V\|_{H^{\otimes p}}] < +\infty \}$

L'operatore $D^p F : S \subset L^q(\mathbb{P}) \longrightarrow L^q(\mathbb{P}; H^{\odot p})$ e' chiudibile $\forall \, p = 1, 2, \ldots$ e $q \in [1, +\infty)$. Consideriamo su S la norma

$$\|F\|_{\mathbb{D}^{p,q}} := \left(\mathbb{E}[|F|^q] + \sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}\left[\|D^k F\|^q_{H^{\otimes k}}\right] \right)^{1/q}$$

Il dominio della derivata di Malliavin D^p in $L^q(\mathbb{P})$ e'

$$\mathbb{D}^{p,q} := \overline{S}^{\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{p,q}}}$$ e la derivata di Malliavin D^p in $L^q(\mathbb{P})$ e' l'operatore $D^p : \mathbb{D}^{p,q} \longrightarrow L^q(\mathbb{P}; H^{\odot p})$ ottenuto come l'estensione chiusa (minimale) di

$$D^p : S \subset L^q(\mathbb{P}) \longrightarrow L^q(\mathbb{P}; H^{\odot p}).$$

3

Per $q=2$, $\mathbb{D}^{p,2}$ e' uno sp di Hilbert $(p=1,2,\dots)$

Proposizione (Regola delle catena)

Sia $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ C^1 con derivate parziali limitate.
Sia $F = (F_1,\dots,F_m)$ t.c. $F_i \in \mathbb{D}^{1,q}$ per qualche $q \in [1,+\infty)$.
Allora $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,q}$ e vale

$$D\varphi(F) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) . DF_i$$

Esercizio (Regola di Leibniz)

Sia $p=1,2,\dots$, $F, G \in \mathbb{D}^{p,4}$, allora $FG \in \mathbb{D}^{p,2}$ e

$$D^p(FG) = \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} D^r F \,\tilde{\otimes}_r\, D^{p-r} G$$

Divergenza

Sia $p = 1, 2, \ldots$

Definizione

L'operatore divergenza δ^p di ordine p e' l'aggiunto di

$$D^p : S \subset \mathbb{D}^{p,2} \subset L^2(\mathbb{P}) \longrightarrow L^2(\mathbb{P}; H^{\odot 2})$$

Dunque $\mathrm{dom}(\delta^p) = \{ u \in L^2(\mathbb{P}; H^{\otimes p})$ t.c. $\exists c > 0$

$$: \left| \mathbb{E}\left[\langle D^p F, u \rangle_{H^{\otimes p}} \right] \right| \leq c \sqrt{\mathbb{E}[F^2]}, \ \forall F \in S \}$$

equivalentemente, $\forall F \in \mathbb{D}^{p,2}$

e per $u \in \mathrm{dom}(\delta^p)$, $\delta^p(u)$ e' l'unico elemento di $L^2(\mathbb{P})$ t.c.

$$\mathbb{E}\left[\langle DF, u \rangle_{H^{\otimes p}} \right] = \mathbb{E}\left[F \delta^p(u) \right] \quad \forall F \in S$$

equivalent. $\forall F \in \mathbb{D}^{p,2}$

formula di dualità

Integrali multipli

Definizione

Sia $p = 1, 2, \ldots$ e $f \in H^{\odot p}$. L'integrale multiplo di f di ordine p e' $I_p(f) := \delta^p(f) \in L^2(\mathbb{P})$ t.c.

$$\mathbb{E}\left[\langle D^p F, f \rangle_{H^{\otimes p}} \right] = \mathbb{E}\left[F \, I_p(f) \right] \quad \forall F \in S \quad \left(\forall F \in \mathbb{D}^{p,2} \right)$$

Poniamo $I_0(c) = c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Proposizione Sia $p=1,2,\dots$, $f\in H^{\odot p}$. $\forall q\in[1,+\infty)$,

$$I_p(f)\in \mathbb{D}^{\infty,q}.$$

5

Inoltre per $r=1,2,\dots$

$$D^r I_p(f)=\begin{cases} p(p-1)\cdots(p-r+1)\,I_{p-r}(f), & r\le p\\ 0, & r>p\end{cases}$$

Proposizione Per $p,q=1,2,\dots$, $f\in H^{\odot p}$, $g\in H^{\odot q}$ si ha

$$\mathbb{E}\left[I_p(f)\,I_q(g)\right]=\begin{cases}0, & p\neq q\\ p!\,\langle f,g\rangle_{H^{\otimes p}}, & p=q\end{cases}$$

In particolare, $\mathbb{E}\left[I_p(f)^2\right]=p!\,\|f\|^2_{H^{\otimes p}}$.

Esempio Sia $H=L^2(A,\mathcal{A},\mu)=:L^2(\mu)$ con $(A,\mathcal{A})$ polacco, μ positiva, σ-finita e non-atomica.
Sia G la misura Gaussiana su $(A,\mathcal{A})$ con controllo μ, allora il processo Gaussiano isonormale X su $L^2(\mu)$ e'

$$X(f)=\int_A f(a)\,G(da)$$

integrale di Wiener-Itô di f rispetto a G

In tal caso, $H^{\odot p} = L^2_s(A^p, \mathcal{A}^{\otimes p}, \mu^p) =: L^2_s(\mu^p)$ e per $f \in L^2_s(\mu^p)$ si ha

(Itô, 1951)

$$I_p(f) = \int_{A^p} f(a_1, \dots, a_p)\, G(da_1) \dots G(da_p)$$

integrale multiplo di Wiener-Itô di $f \in L^2_s(\mu^p)$ rispetto a G.

Osservazione

Se $A = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mu = \text{Leb}$, si ha per $f \in L^2_s(\text{Leb}^p)$, $p = 1, 2, \dots$

$$I_p(f) = p! \int_0^1 dB_{t_1} \int_0^{t_1} dB_{t_2} \dots \int_0^{t_{p-1}} dB_{t_p} f(t_1, \dots, t_p),$$

con $\{B_t, t \in [0,1]\}$ moto Browniano.

Proposizione

Sia $f \in H$, $\|f\|_H = 1$ e $q = 1, 2, \dots$ Allora vale

$$H_q(X(f)) = I_q(f^{\otimes q})$$

Dunque $I_q : H^{\odot q} \longrightarrow C_q$ e' un'isometria lineare se su $H^{\odot q}$ considero la norma $\|\cdot\|_{H^{\otimes q}} / \sqrt{q!}$ e su C_q considero la norma $L^2(\mathbb{P})$.

Corollario (formula di Stroock-Varadhan)

Per $F \in L^2(\mathbb{P})$ vale
$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{p=1}^{+\infty} I_p(f_p) \quad \text{in } L^2(\mathbb{P})$$
con $f_p \in H^{\odot p}$, $p = 1, 2, \dots$ Inoltre, se $F \in \mathbb{D}^{m,2}$, allora
$$f_p = \frac{1}{p!}\mathbb{E}[D^p F] \quad \forall\, p = 1, 2, \dots, m.$$

Esercizio

Sia $F \in L^2(\mathbb{P})$ t.c. $F = \mathbb{E}[F] + \sum_{p=1}^{+\infty} I_p(f_p)$, $f_p \in H^{\odot p}$.
$$F \in \mathbb{D}^{k,2} \quad \text{se e solo se} \quad \sum_{p=k}^{+\infty} p^k p! \, \|f_p\|^2_{H^{\otimes p}} < +\infty$$
e in tal caso
$$D^k F = \sum_{p=k}^{+\infty} p(p-1)\dots(p-k+1) I_{p-k}(f_p).$$

Esercizio (Disuguaglianza di Poincaré al I ordine)

Sia $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, allora $\mathrm{Var}(F) \le \mathbb{E}\left[\|DF\|^2_H\right]$.

Osservazione Siano $H = L^2(\mu)$ e $F \in L^2(\mathbb{P})$ $\quad L^2(A, \mathcal{A}, \mu) =: L^2(\mu)$
$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{A^p} f_p(a_1, \dots, a_p)\, G(da_1) \dots G(da_p), \quad f_p \in L^2_s(\mu^p).$$

Se $F \in \mathbb{D}^{k,2}$, per $k \in \{1,2,\dots\}$, allora $D^k F$ e' il processo stocastico su A^k dato da

$$(a_1,\dots,a_k) \longmapsto \underbrace{\sum_{p=k}^{+\infty} p(p-1)\cdots(p-k+1)\int_{A^{p-k}} f(a_1,\dots,a_k,a_{k+1},\dots,a_p)\,G(da_{k+1})\cdots G(da_p)}_{=:\, D^k_{a_1\dots a_k}F}$$

Contrazioni

Supponiamo $H = L^2(\mu)$. Siano $p,q = 1,2,\dots$, $f \in L^2_s(\mu^p)$, $g \in L^2_s(\mu^q)$, per $r \in \{0,1,\dots,p \wedge q\}$ definiamo la contrazione $f \otimes_r g$ tra f e g di ordine r e' l'elemento di $L^2(\mu^{p+q-2r})$ definita da

$$f \otimes_r g(x_1,\dots,x_{p-r},y_1,\dots,y_{q-r})$$
$$:= \int_{A^r} f(x_1,\dots,x_{p-r},a_1,\dots,a_r)\,g(y_1,\dots,y_{q-r},a_1,\dots,a_r)\,d\mu(a_1)\cdots d\mu(a_r)$$

Nonostante f e g siano simmetriche, non e' detto che $f \otimes_r g$ sia simmetrica; la simmetrizzazione canonica di $f \otimes_r g$ e' $f \tilde{\otimes}_r g \in L^2_s(\mu^{p+q-2r})$ data da

$$f \tilde{\otimes}_r g(x_1,\dots,x_{p-r},y_1,\dots,y_{q-r}) := \frac{1}{(p+q-2r)!}\sum_{\sigma \in S^{p+q-2r}} f \otimes_r g(x_{\sigma_1},\dots,x_{\sigma_{p-r}},y_{\sigma_1},\dots,y_{\sigma_{q-r}})$$

Formula prodotto

Siano $p,q = 1,2,\dots$, $f \in H^{\odot p}$, $g \in H^{\odot q}$, allora

$$I_p(f)\, I_q(g) = \sum_{r=0}^{p\wedge q} r! \binom{p}{r}\binom{q}{r} I_{p+q-2r}\left(f \,\tilde{\otimes}_r\, g\right). \qquad (9)$$

dimostrazione

Sappiamo che $I_p(f), I_q(g) \in \mathbb{D}^{\infty,q}$, $q \in [1,+\infty)$, in particolare $\in \mathbb{D}^{\infty,4}$, dunque $I_p(f) I_q(g) \in \mathbb{D}^{\infty,2}$.
Allora per la formula di Stroock-Varadhan

$$I_p(f) I_q(g) = \sum_{s=0}^{+\infty} I_s(h_s), \quad h_s = \mathbb{E}\left[D^s\left(I_p(f) I_q(g)\right)\right]/s!$$

$$= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{s!} I_s\left(\mathbb{E}\left[D^s\left(I_p(f) I_q(g)\right)\right]\right).$$

Dalla regola di Leibniz,

$$D^s\left(I_p(f) I_q(g)\right) = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} D^k I_p(f) \,\tilde{\otimes}\, D^{s-k} I_q(g)$$

$$= \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \frac{p!}{(p-k)!} I_{p-k}(f) \,\tilde{\otimes}\, \frac{q!}{(q-s+k)!} I_{q-s+k}(g)$$

Passando alla media,

$\mathbb{E}\left[I_{p-k}(f) \,\tilde{\otimes}\, I_{q-s+k}(g)\right] = 0$ tranne che per $p-k = q-s+k$.

Questo e' equivalente a s e $p+q$ con la stessa parità, $k = (p-q+s)/2$ e $|q-p| \le s \le p+q$. Quindi

$$I_p(f) I_q(g) = \sum_{s=|p-q|}^{p+q} \left(\frac{p+q-s}{2}\right)! \binom{p}{\frac{p+q-s}{2}}\binom{q}{\frac{p+q-s}{2}} I_s\left(f \,\tilde{\otimes}_{\frac{p+q-s}{2}}\, g\right) \times$$

$\times \mathbb{1}\{s \text{ e } p+q \text{ stessa parità}\}$

$$= \sum_{r=0}^{p\wedge q} r! \binom{p}{r}\binom{q}{r} I_{p+q-2r}(f \tilde{\otimes}_r g).$$

$r = (p+q-s)/2$.

$\square$

Integrali doppi

Sia $f \in H$, $\|f\|_H = 1$, allora $I_2(f^{\otimes 2}) = H_2(X(f)) =$
$= X(f)^2 - 1 \overset{d}{=} N^2 - 1$, $N \sim N(0,1)$. Chi-quadro centrato

Proposizione Sia $F = I_2(f)$ con $f \in H^{\odot 2}$. Allora

1. $F = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j(f)(N_j^2 - 1)$, dove $\{N_j, j \geq 1\}$ e' una successione di s.a. iid $N(0,1)$. La serie converge in $L^2(\mathbb{P})$ e q.c. La successione di numeri $\{\lambda_j(f), j \geq 1\}$ e' la successione di autovalori dell'operatore di Hilbert-Schmidt

$$A_f : H \longrightarrow H$$
$$g \longmapsto f \otimes_1 g$$

2. Per $p = 2, 3, \dots$

$$k_p(F) = 2^{p-1}(p-1)! \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j(f)^p$$

3. La legge di F e' determinata dai suoi momenti (equivalentemente, dai suoi cumulanti). 11

Questo non e' vero per caos di Wiener di ordine $q \geq 3$, ossia in generale non e' detto la legge e' determinata dai momenti.

Assoluta continuita' delle leggi di integrali multipli

Teorema Sia $q = 1, 2, \ldots$ e $f \in H^{\odot q}$ t.c. $\|f\|_{H^{\otimes q}} > 0$. Allora la legge di $F = I_q(f)$ e' a.c. rispetto alla misura di Lebesgue.

In realta', una v.a. che vive in una somma finita di caos di Wiener e' o costante o con legge a.c. rispetto alla misura di Lebesgue. (Shigekawa, 1980)

Problema aperto

Classificare le leggi delle v.a. nel caos di Wiener di ordine q, con $q = 3, 4, \ldots$

Semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck

Decomposizione caotica di Wiener-Itô

$F \in L^2(\mathbb{P})$, $F = \sum_{p=0}^{+\infty} J_p(F)$ in $L^2(\mathbb{P})$, con

$J_p(F) \in C_p$ p-esimo caos di Wiener, $J_p(F) = I_p(f_p)$, $f_p \in H^{\odot p}$.

$J_p(F) = \mathrm{proj}(F|C_p)$

Definizione Il semigruppo di O-U $(P_t)_{t\geq 0}$ e' definito come segue: per $t \geq 0$, $F \in L^2(\mathbb{P})$,

$$P_t F := \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-pt} F_p \in L^2(\mathbb{P})$$

Osservazione Dalla definizione, $P_{t+s} F = P_t(P_s F) = P_s(P_t F)$ $\forall\, t,s \geq 0$, $F \in L^2(\mathbb{P})$

Proprietà di semigruppo

C'e' una procedura alternativa per definire $(P_t)_{t\geq 0}$, simile a quella usata nel caso uno-dimensionale.

Sia $F \in L^1(\mathbb{P})$, X' copia indipendente di X, supponiamo che X e X' siano definiti sullo spazio prodotto $(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \mathbb{P} \times \mathbb{P}')$.

Dato che F e' $\sigma(X)$-misurabile, possiamo scrivere $F = \psi_F(X)$, con $\psi_F : \mathbb{R}^H \to \mathbb{R}$ misurabile determinata $\mathbb{P}\circ X^{-1}$-q.c. Come conseguenza, $\forall t \geq 0$, la s.a.

$$\psi_F\left(e^{-t} X + \sqrt{1-e^{-2t}}\, X'\right) \text{ e' ben definita } \mathbb{P}\times\mathbb{P}'\text{-q.c.}$$

$\left(e^{-t} X + \sqrt{1-e^{-2t}}\, X' \overset{d}{=} X\right)$. Ragionando come nel caso uno-dimensionale, la collezione di operatori

$$L^1(\mathbb{P}) \ni F \longmapsto \mathbb{E}'\left[\psi_F\left(e^{-t} X + \sqrt{1-e^{-2t}}\, X'\right)\right], \quad t \geq 0$$

e' un semigruppo. Ora dimostriamo che coincide con $(P_t)_{t\geq 0}$ su $L^2(\mathbb{P})$.

Teorema (Formula di Mehler) $\forall F \in L^2(\mathbb{P})$ e $\forall t \geq 0$

$$P_t(F) = \mathbb{E}'\left[\psi_F\left(e^{-t} X + \sqrt{1-e^{-2t}}\, X'\right)\right] \quad *$$

dove $\mathbb{E}'$ denota la media sotto $\mathbb{P}'$.

Osservazioni 1. Grazie alla formula di Mehler, possiamo estendere in modo consistente $(P_t)_{t\geq 0}$ per $F \in L^1(\mathbb{P})$ ponendo $P_t(F) := \mathbb{E}'\left[\psi_F\left(e^{-t} X + \sqrt{1-e^{-2t}}\, X'\right)\right]$.

2. Un modo alternativo di esprimere la relazione $*$ e' la seguente: consideriamo una copia indipendente

X' di X e assumiamo che X e X' siano definiti sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, allora

$$* \quad P_t(F) = \mathbb{E}\left[\psi_F\left(e^{-t}X + \sqrt{1-e^{-2t}}\,X'\right) \Big| X\right].$$

14

dimostrazione Osserviamo che

$\text{span}\left\{ e^{X(h)-\frac{1}{2}},\ h \in H,\ \|h\|_H = 1 \right\}$ è denso in $L^2(\mathbb{P})$.

Dimostriamo che vale la formula di Mehler per $F = e^{X(h)-\frac{1}{2}}$, $h \in H$, $\|h\|_H = 1$. Abbiamo

$\psi_F(\xi) = e^{\xi(h)-\frac{1}{2}}$ con $\xi : H \to \mathbb{R}$ e $\psi_F : \mathbb{R}^H \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto e^{\xi(h)-\frac{1}{2}}$

$$\mathbb{E}'\left[\psi_F\left(e^{-t}X + \sqrt{1-e^{-2t}}\,X'\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}'\left[e^{e^{-t}X(h) + \sqrt{1-e^{-2t}}\,X'(h) - \frac{1}{2}}\right]$$

$*$ $N \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$\mathbb{E}[e^{tN}] = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$

$$\overset{*}{=} e^{e^{-t}X(h) - \frac{1}{2}e^{-2t}}$$

$e^{cx - c^2/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{c^p}{p!} H_p(x)$ in $L^2(\gamma)$

γ densità Gaussiana standard

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{p!} H_p(X(h))$$

in $L^2(\mathbb{P})$

$c = 1$

$= P_t F$, infatti $F = e^{X(h)-\frac{1}{2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{H_p(X(h))}{p!}$ in $L^2(\mathbb{P})$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{I_p(h^{\otimes p})}{p!}.$$

Dunque abbiamo $\forall q \in [1,+\infty)$, $F \in L^q(\mathbb{P})$,

$$P_t F = \mathbb{E}'\left[\psi_F \left(e^{-t} X + \sqrt{1-e^{-2t}}\, X' \right) \right]$$

Proposizione $\forall t \geq 0$, $\forall q \in [1,+\infty)$, P_t e' un operatore lineare di contrazione su $L^q(\mathbb{P})$:

$$\forall F \in L^q(\mathbb{P}), \quad \mathbb{E}\left[|P_t F|^q \right] \leq \mathbb{E}\left[|F|^q \right].$$

Mostreremo poi che P_t e' ipercontrattivo.

Generatore del semigruppo di O-U

Definizione Diciamo che $F \in L^2(\mathbb{P})$ appartiene a $\mathrm{dom}(L)$ se

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^2\, \mathbb{E}\left[J_p(F)^2 \right] < +\infty.$$

In tal caso definiamo $LF := -\sum_{p=1}^{+\infty} p\, J_p(F)$.

Osservazione E' facile far vedere che L coincide con il generatore infinitesimale di $(P_t)_{t\geq 0}$ su $L^2(\mathbb{P})$, ossia per $F \in L^2(\mathbb{P})$, $LF = \lim_{h\to 0} \frac{P_h F - F}{h}$ in $L^2(\mathbb{P})$.

Proposizione Sia $F \in L^2(\mathbb{P})$, allora $F \in \mathrm{dom}(L)$ se e solo se $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ e $DF \in \mathrm{dom}(\delta)$.

In tal caso, $\delta(DF) = -LF$.

dimostrazione Se $F = I_p(f)$, $f \in H^{\odot p}$, allora e' zero. Infatti

$$DI_p(f) = p\, I_{p-1}(f)$$

e quindi $\delta(DI_p(f)) = p\,\delta(I_{p-1}(f))$

$$= p\,\delta(\delta^{p-1}(f)) = p\,\delta^p(f) = p\, I_p(f)$$

$$= -L\, I_p(f).$$

Per $F \in L^2(\mathbb{P})$, basta usare la formula di Stroock
$F = \sum_{p=0}^{+\infty} I_p(f_p)$, $f_p \in H^{\odot p}$ e ragionare per approssimazione. $\square$

Teorema Sia $F \in \mathcal{S} = \left\{ f(X(\phi_1),\dots,X(\phi_m)),\ \phi_i \in H,\ f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\ C_p^\infty \right\}$

Allora $F \in \operatorname{dom}(L)$ e

$$LF = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X(\phi_1),\dots,X(\phi_m)) \langle \phi_i, \phi_j \rangle_H$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(\phi_1),\dots,X(\phi_m))\, X(\phi_i)$$

L agisce come un operatore differenziale del second'ordine sulle s.a. semplici.

Definizione Per $F \in L^2(\mathbb{P})$, definiamo

$$L^{-1}F := -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} J_p(F).$$

L^{-1} e' detto lo pseudo-inverso di L.

Proposizione $\forall F \in L^2(\mathbb{P})$, $L^{-1}(F) \in \mathrm{dom}(L)$ e

$$LL^{-1}F = F - \mathbb{E}[F].$$

(E' l'inverso se ci restringiamo alle v.a. centrate.)

Ipercontrattività del semigruppo di O-U.

Teorema (Nelson) Sia $F \in L^p(\mathbb{P})$ per qualche $p > 1$. Allora $\forall t \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[|P_tF|^{1+e^{2t}(p-1)}\right]^{(1+e^{2t}(p-1))^{-1}} \leq \mathbb{E}\left[|F|^p\right]^{1/p}$$

Osservazione Per $t > 0$, $1 + e^{2t}(p-1) > p$ quindi il risultato di Nelson e' strettamente più forte del risultato di contrattività.

Per $t > 0$

$$\mathbb{E}\left[|P_tF|^p\right]^{1/p} \leq \mathbb{E}\left[|P_tF|^{1+e^{2t}(p-1)}\right]^{(1+e^{2t}(p-1))^{-1}} \leq \mathbb{E}\left[|F|^p\right]^{1/p}.$$

Corollario Sia $F \in C_p$ (p-esimo Wiener caos di X), con $p \geq 1$. Allora, per $r > q > 1$, (18)

$$\mathbb{E}[|F|^q]^{1/q} \overset{(1)}{\leq} \mathbb{E}[|F|^r]^{1/r} \overset{(2)}{\leq} \left(\frac{r-1}{q-1}\right)^{p/2} \mathbb{E}[|F|^q]^{1/q}$$

Quindi in un caos fissato, tutte le norme L^q sono equivalenti.

dimostrazione La disuguaglianza (1) segue da Jensen. Per la (2), sia $t := \frac{1}{2}\log\left((r-1)/(q-1)\right)$, allora dal teorema di Nelson

$$\mathbb{E}[|P_t F|^r]^{1/r} \leq \mathbb{E}[|F|^q]^{1/q}.$$ Ma $P_t F = e^{-pt} F$ per definizione, dunque

$$\mathbb{E}[|F|^r]^{1/r} = e^{pt}\, \mathbb{E}[|P_t F|^r]^{1/r} \leq$$

$$\leq \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{p/2} \mathbb{E}[|F|^q]^{1/q}. \qquad \square$$

Osservazione Si può dimostrare, in modo analogo, che in una somma finita di caos di Wiener tutte le norme L^q sono equivalenti.

Stein incontra Malliavin

Sia $N \sim N(0,1)$, F una v.a. $\mathbb{E}[F]=0$, $\mathbb{E}[F^2]=1$

$$d_{\mathcal{H}}(F,N) := \sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(N)] \right|$$

$\mathcal{H}$ classe separante

$$\leq \sup_{g \in \mathcal{G}_{\mathcal{H}}} \left| \mathbb{E}[F g(F)] - \mathbb{E}[g'(F)] \right|$$

metodo di Stein

Ad esempio, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_W$, allora $\mathcal{G}_W = C^1 \cap \mathrm{Lip}(\sqrt{2/\pi})$.

Ora dobbiamo lavorare sul termine $\mathbb{E}[Fg(F)]$.

Teorema (Integrazione per parti)

Siano $F, G \in \mathbb{D}^{1,2}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 con derivata limitata. Allora

$$\mathbb{E}[Fg(G)] = \mathbb{E}[F]\,\mathbb{E}[g(G)] + \mathbb{E}[g'(G) \langle DG, -DL^{-1}G \rangle_H].$$

dimostrazione

Dato che $F, G \in \mathbb{D}^{1,2}$, $g \in C^1_b$

$$\mathbb{E}[(F - \mathbb{E}[F])g(G)] = \mathbb{E}[L L^{-1} F \cdot g(G)]$$

$-L = \delta D$

$$= \mathbb{E}[\delta(-DL^{-1}F) \cdot g(G)]$$

formula di dualità

$$= \mathbb{E}[\langle -DL^{-1}F, Dg(G) \rangle_H] = \mathbb{E}[\langle -DL^{-1}F, DG \rangle_H \, g'(G)] \quad \square$$

formula della catena

Proposizione 20

Sia $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ t.c. $\mathbb{E}[F]=0$. Allora

$$-DL^{-1}F = \int_0^{+\infty} e^{-t} P_t DF \, dt = -(L-I)^{-1} DF.$$

Usando l'integrazione per parti nella stima di Stein abbiamo: $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $\mathbb{E}[F]=0$, $\mathbb{E}[F^2]=1$

$$d_W(F,N) \le \sup_{g \in C^1 \cap Lip(\sqrt{2/\pi})} \left| \mathbb{E}[F g(F)] - \mathbb{E}[g'(F)] \right|$$

$$= \sup_{g \in C^1 \cap Lip(\sqrt{2/\pi})} \left| \mathbb{E}\left[g'(F)\left(1 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H\right)\right] \right|$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \mathbb{E}\left[\left| 1 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H \right|\right]$$

Se, inoltre, $F \in \mathbb{D}^{1,4}$, allora $\langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H \in L^2(\mathbb{P})$ e

$$\mathbb{E}\left[\left|1 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H\right|\right] \le \sqrt{\mathrm{Var}\left(\langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H\right)}.$$

Infatti,

$$\mathbb{E}\left[\langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H^2\right] \overset{\text{C-S a } \langle\cdot,\cdot\rangle_H}{\le} \mathbb{E}\left[\|DF\|_H^2 \, \|DL^{-1}F\|_H^2\right]$$

$$\overset{\text{C-S a } \mathbb{E}[\cdot]}{\le} \underbrace{\mathbb{E}\left[\|DF\|_H^4\right]^{1/4}}_{<+\infty \text{ perché } F \in \mathbb{D}^{1,4}} \mathbb{E}\left[\|DL^{-1}F\|_H^4\right]^{1/4}$$

Ora consideriamo $\mathbb{E}[\|DL^{-1}F\|_H^4]$. (21)

$$\mathbb{E}[\|DL^{-1}F\|_H^4] = \mathbb{E}\left[\left\|\int_0^{+\infty} e^{-t} P_t DF\, dt\right\|_H^4\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\|P_t DF\|_H\, dt\right)^4\right]$$
$$\underset{\text{Jensen a } e^{-t}dt}{\leq} \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t}\|P_t DF\|_H^4\, dt\right]$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathbb{E}[\|P_t DF\|_H^4]\, dt$$
$$\underset{P_t \text{ contrazione}}{\leq} \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathbb{E}[\|DF\|_H^4]\, dt$$
$$= \mathbb{E}[\|DF\|_H^4] < +\infty \text{ perché } F \in \mathbb{D}^{1,4}.$$

Ora, dall'integrazione per parti con $g(x)=x$ e $F=G$ si ha
$$1 = \mathbb{E}[F^2] = \mathbb{E}[\langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H]$$
dunque
$$\mathbb{E}[|1-\langle DF,-DL^{-1}F\rangle_H|] \leq \sqrt{\mathrm{Var}(\langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H)}$$

Teorema Sia $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ t.c. $\mathbb{E}[F]=0$, $\mathbb{E}[F^2]=\sigma^2>0$, $N \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Allora
$$d_{FM}(F,N) \leq d_W(F,N) \leq \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathbb{E}[|\sigma^2 - \langle DF,-DL^{-1}F\rangle_H|]$$

Se inoltre F ha una densità,

22

$$d_{TV}(F,N) \leq \frac{2}{\sigma^2} \mathbb{E}\left[\left|\sigma^2 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H\right|\right]$$

$$d_{Kol}(F,N) \leq \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}\left[\left|\sigma^2 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H\right|\right].$$

Osservazioni 1. $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $\mathbb{E}[F]$, $\mathbb{E}[F^2] = \sigma^2 > 0$ e $N \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2)$ con $\gamma^2 > 0$, allora

$$d_{\mathcal{H}}(F,N) \leq \frac{2}{\sigma^2 \vee \gamma^2} \left|\sigma^2 - \gamma^2\right| + d_{\mathcal{H}}\left(F, N \cdot \frac{\sigma}{\gamma}\right)$$

con $\mathcal{H}$ classe separante.

2. Se $F \in \mathbb{D}^{1,4}$, $\mathbb{E}[F] = 0$, $\mathbb{E}[F^2] = \sigma^2 > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\sigma^2 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H\right|\right] \leq \sqrt{Var\left(\langle DF, -DL^{-1}F\rangle_H\right)} < +\infty$$

Approssimazione Gaussiana

Corollario Sia $\{F_m, m \geq 1\} \subset \mathbb{D}^{1,2}$ t.c. $\mathbb{E}[F_m] = 0$ $\forall m$ e $\mathbb{E}[F_m^2] \xrightarrow[m]{} \sigma^2 > 0$.

Se $\langle DF_m, -DL^{-1}F_m\rangle_H \xrightarrow[m]{} \sigma^2$ in $L^1(\mathbb{P})$,

allora $F_m \xrightarrow[m]{d} N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Osservazione Supponiamo $F_m = I_q(f_m)$, $f_m \in H^{\odot q}$ per un certo $q \in \{2, 3, \dots\}$. Sotto le ipotesi del corollario abbiamo $q! \|f_m\|^2_{H^{\otimes q}} \xrightarrow[m]{} \sigma^2 > 0$.

Si ha $\langle DF_m, -DL^{-1}F_m\rangle_H = \langle q I_{q-1}(f_m), -D(-\frac{1}{q} I_q(f_m)\rangle_H$

$= q\langle I_{q-1}(f_m), I_{q-1}(f_m)\rangle_H =$ ㉓

$= \frac{1}{q}\langle DF_m, DF_m\rangle_H = \frac{1}{q}\|DF_m\|_H^2$

Dunque se $\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{q}\|DF_m\|_H^2 - \sigma^2\right|\right] \xrightarrow[m]{} 0$

allora $I_q(f_m) \xrightarrow[m]{d} N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Dato che $\left\{\frac{1}{q}\|DF_m\|_H^2\right\}_m$ vive in una somma finita di caos di Wiener (e tutte le norme L^p sono equivalenti), allora

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{q}\|DF_m\|_H^2 - \sigma^2\right|\right] \xrightarrow{m} 0$$

se e solo se $\mathrm{Var}\left(\frac{1}{q}\|DF_m\|_H^2\right) \xrightarrow{m} 0$.

Quindi se $\mathrm{Var}\left(\frac{1}{q}\|DF_m\|_H^2\right) \xrightarrow{m} 0$, allora $I_q(f_m) \xrightarrow[m]{d} N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
Faremo vedere che vale anche il viceversa...

Inoltre, $d_{\mathcal{H}}(F_m, N) \overset{*}{\leq} C_{\mathcal{H}}(\sigma^2)\sqrt{\mathrm{Var}\left(\frac{1}{q}\|DF_m\|_H^2\right)}$ TLC quantitativo

con $C_{\mathcal{H}}(\sigma^2) = \begin{cases} 2/\sigma^2, & \mathcal{H} = \mathcal{H}_{TV} \\ 1/\sigma^2, & \mathcal{H} = \mathcal{H}_{Kol} \\ \frac{1}{\sigma}\sqrt{2/\pi}, & \mathcal{H} = \mathcal{H}_W, \mathcal{H}_{FM} \end{cases}$

* Posso usarlo perché $F_m = I_q(f_m)$ sicuramente ha densità per n abbastanza grande $\left(q!\|f_m\|^2_{H^{\otimes q}} \xrightarrow[m]{} \sigma^2 > 0\right)$.

Lemma Per $q=2,3,\dots$ e $F=I_q(f)$, $f\in H^{\odot q}$, abbiamo

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{q}\|DF\|_H^2\right) \leq \frac{q-1}{3q}\Big(\underbrace{\mathbb{E}[F^4]-3\,\mathbb{E}[F^2]^2}_{= K_4(F)}\Big) \leq (q-1)\,\mathrm{Var}\left(\frac{1}{q}\|DF\|_H^2\right)$$

Corollario Per $q=2,3,\dots$ e $F=I_q(f)$, $f\in H^{\odot q}$ si ha

$$K_4(F)\geq 0$$

dimostrazione

Sia $f\in H$, $\|f\|_H=1$, allora $I_q(f^{\otimes q})=H_q(X(f))$.

Allora $DF=q\,H_{q-1}(X(f))\,f$ e

$$\frac{1}{q}\|DF\|_H^2 = q\,H_{q-1}(X(f))^2\langle f,f\rangle_H = q\,H_{q-1}(X(f))^2$$

$$= q\sum_{r=0}^{q-1} r!\binom{q-1}{r}^2 H_{2q-2-2r}(X(f))$$

$$= q\sum_{r=0}^{q-1} r!\binom{q-1}{r}^2 I_{2q-2-2r}\left(f^{\otimes 2q-2-2r}\right)$$

$$= q\sum_{j=1}^{q} (j-1)!\binom{q-1}{j-1}^2 I_{2q-2j}\left(f^{\otimes 2q-2j}\right)$$

$$= \mathbb{E}[F^2] + q\sum_{r=1}^{q-1}(r-1)!\binom{q-1}{r-1}^2 I_{2q-2r}\left(f^{\otimes 2q-2r}\right)$$

In generale, per $F=I_q(f)$, $f\in H^{\odot q}$ si ha

$$\frac{1}{q}\|DF\|_H^2 = \mathbb{E}[F^2] + q\sum_{r=1}^{q-1}(r-1)!\binom{q-1}{r-1}^2 I_{2q-2r}(f\tilde{\otimes}_r f)$$

25

Dunque

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{q}\|DF\|_H^2\right) = \frac{1}{q^2}\sum_{r=1}^{q-1} r^2 (r!)^2 \binom{q}{r}^4 (2q-2r)!\,\|f\tilde{\otimes}_r f\|^2_{H^{\otimes 2q-2r}}$$

Ora lavoriamo con $\mathbb{E}[F^4] - 3\,\mathbb{E}[F^2]^2$.

Abbiamo

$$\mathbb{E}[F^4] = \mathbb{E}[F\cdot F^3] = -\frac{1}{q}\mathbb{E}[LF\cdot F^3] = \frac{1}{q}\mathbb{E}[\delta DF\cdot F^3]$$

$LF = -qF$ $\qquad$ $L = -\delta D$

$$\underset{\text{dualità}}{=} \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[\langle DF, DF^3\rangle_H\right] = \frac{3}{q}\mathbb{E}\left[\langle DF, DF\rangle_H F^2\right]$$

$$= \frac{3}{q}\mathbb{E}\left[\|DF\|_H^2 F^2\right]$$

Mettiamoci sempre nel caso in cui $F = I_q(f^{\otimes q})$, $f\in H$, $\|f\|_H = 1$ e quindi $F = H_q(X(f))$. Dunque

$$\frac{1}{q}\|DF\|_H^2 = \mathbb{E}[F^2] + q\sum_{r=1}^{q-1}(r-1)!\binom{q-1}{r-1}^2 I_{2q-2r}(f^{\otimes 2q-2r})$$

e $$F^2 = H_q(X(f))^2 = \sum_{r=0}^{q} r!\binom{q}{r}^2 H_{2q-2r}(X(f))$$

$$= \sum_{r=0}^{q} r!\binom{q}{r}^2 I_{2q-2r}(f^{\otimes 2q-2r})$$

$$= \mathbb{E}[F^2] + \sum_{j=0}^{q-1} j!\binom{q}{j}^2 I_{2q-2j}(f^{\otimes 2q-2j})$$

Mettendo insieme abbiamo per $\mathbb{E}[F^4]$

$$\frac{3}{q}\mathbb{E}\left[\|DF\|_H^2 F^2\right] = 3\Bigg(\mathbb{E}[F^2]^2$$

$$+q\sum_{r=1}^{q-1}(r-1)!\binom{q-1}{r-1}^2\sum_{j=0}^{q-1} j!\binom{q}{j}^2\mathbb{E}\left[I_{2q-2r}\left(f^{\otimes 2q-2r}\right)I_{2q-2j}\left(f^{\otimes 2q-2j}\right)\right]\Bigg)$$

$$= 3\mathbb{E}[F^2]^2 + 3q\sum_{r=1}^{q-1}(r-1)!\,r!\binom{q-1}{r-1}^2\binom{q}{r}^2(2q-2r)!\,\|f^{\otimes 2q-2r}\|^2_{H^{\otimes 2q-2r}}$$

Dunque

$$\mathbb{E}[F^4]-3\mathbb{E}[F^2]^2$$

$$= 3q\sum_{r=1}^{q-1}(r-1)!\,r!\binom{q-1}{r-1}^2\binom{q}{r}^2(2q-2r)!\,\|f^{\otimes 2q-2r}\|^2_{H^{\otimes 2q-2r}}$$

$$= \frac{3}{q}\sum_{r=1}^{q-1} r(r!)^2\binom{q}{r}^4(2q-2r)!\,\|f^{\otimes 2q-2r}\|^2_{H^{\otimes 2q-2r}}$$

In generale,

$$\mathbb{E}[F^4]-3\mathbb{E}[F^2]^2 = \frac{3}{q}\sum_{r=1}^{q-1} r(r!)^2\binom{q}{r}^2(2q-2r)!\,\|f\tilde{\otimes}_r f\|^2_{H^{\otimes 2q-2r}}$$

Confrontando le espressioni ottenute si conclude. $\square$

Teorema Sia $q=2,3,\dots$ e $F=I_q(f)$, $f\in H^{\odot q}$ t.c. $\mathbb{E}[F^2]=\sigma^2>0$. Allora per $N\sim N(0,\sigma^2)$,

$$d_{\mathcal{H}}(F,N)\le C_{\mathcal{H}}(\sigma^2)\sqrt{\operatorname{Var}\left(\frac{1}{q}\|DF\|_H^2\right)}\le C_{\mathcal{H}}(\sigma^2)\sqrt{\frac{q-1}{3q}\left(\mathbb{E}[F^4]-3\sigma^4\right)}$$

con $C_{\mathcal{H}}(\sigma^2) = \begin{cases} 2/\sigma^2, & \mathcal{H} = \mathcal{H}_{TV} \\ 1/\sigma^2, & \mathcal{H} = \mathcal{H}_{Kol} \\ \frac{1}{\sigma}\sqrt{2/\pi}, & \mathcal{H} = \mathcal{H}_W, \mathcal{H}_{FM} \end{cases}$

Una conseguenza fondamentale e' la seguente semplificazione del metodo dei momenti/cumulanti.

Teorema (del momento quarto)

Sia $F_n = I_q(f_n)$, $n = 1, 2, \dots$ una successione di S.a. di C_q, $q = 2, 3, \dots$ ($f_n \in H^{\odot q}$). Supponiamo che $\mathbb{E}[F_n^2] = q! \, \|f_n\|^2_{H^{\otimes q}} \xrightarrow[n]{} \sigma^2 > 0$. Allora le seguenti sono equivalenti: $(N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2))$

(i) $F_n \xrightarrow[n]{d} N$

(ii) $\mathbb{E}[F_n^4] \xrightarrow[n]{} 3\sigma^4$ (equivalentemente, $K_4(F_n) \xrightarrow[n]{} 0$)

(iii) $\mathrm{Var}(\|DF_n\|^2_H) \xrightarrow[n]{} 0$

(iv) $\|f_n \tilde{\otimes}_r f_n\|_{H^{\otimes(2q-2r)}} \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall r = 1, \dots, q-1$

(v) $\|f_n \otimes_r f_n\|_{H^{\otimes(2q-2r)}} \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall r = 1, \dots, q-1$

Corollario Sotto le ip del teorema precedente, le seguenti sono equivalenti: Sia $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

1. $F_n \xrightarrow[n]{d} N$
2. $d_{TV}(F_n, N) \xrightarrow[n]{} 0$
3. $d_W(F_n, N) \xrightarrow[n]{} 0$

(ovviamente $F_n \xrightarrow[n]{d} N$ se e solo se $d_{Kol}(F_n, N) \xrightarrow[n]{} 0$)

Possiamo scrivere un teorema del momento quarto quantitativo anche per $\{F_n, n\}$ t.c. $F_n = I_{q(n)}(f_n)$, $f_n \in H^{\odot q_n}$: se $\mathbb{E}[F_n^2] \xrightarrow[n]{} \sigma^2 > 0$ e $\mathbb{E}[F_n^4] \to 3\sigma^4$, allora

$$F_n \xrightarrow[n]{} N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ sia in } d_{TV} \text{ che in } d_W.$$

Corollario $q = 2, 3, \dots$, $f \in H^{\odot 2}$ t.c. $\mathbb{E}[I_q(f)^2] = \sigma^2 > 0$. Allora $\mathbb{E}[I_q(f)^4] > 3\sigma^4$, dunque $I_q(f)$ non è Gaussiano.

Osservazione C_q è chiuso in $L^2(P)$, dunque $\{F_n, n \geq 1\} \subset C_q$ non può convergere in $L^2(P)$ a una Gaussiana non degenere.

(Schreiber, 1969) In una somma finita di caos di

Corollario Sotto le ip del teorema precedente, le seguenti sono equivalenti: Sia $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

1. $F_n \xrightarrow[n]{d} N$
2. $d_{TV}(F_n, N) \xrightarrow[n]{} 0$
3. $d_W(F_n, N) \xrightarrow[n]{} 0$

(Ovviamente $F_n \xrightarrow[n]{d} N$ se e solo se $d_{Kol}(F_n, N) \xrightarrow[n]{} 0$)

Possiamo scrivere un teorema del momento quarto quantitativo anche per $\{F_n, n\}$ t.c. $F_n = I_{q(n)}(f_n)$, $f_n \in H^{\odot q_n}$: se $\mathbb{E}[F_n^2] \xrightarrow[n]{} \sigma^2 > 0$ e $\mathbb{E}[F_n^4] \longrightarrow 3\sigma^4$, allora

$$F_n \xrightarrow[n]{} N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ sia in } d_{TV} \text{ che in } d_W.$$

Corollario $q = 2, 3, \dots$, $f \in H^{\odot 2}$ t.c. $\mathbb{E}[I_q(f)^2] = \sigma^2 > 0$. Allora $\mathbb{E}[I_q(f)^4] > 3\sigma^4$, dunque $I_q(f)$ non e' Gaussiano.

Osservazione C_q e' chiuso in $L^2(\mathbb{P})$, dunque $\{F_n, n \geq 1\} \subset C_q$ non puo' convergere in $L^2(\mathbb{P})$ a una Gaussiana non degenere.

(Schreiber, 1969) In una somma finita di caos di

Wiener la topologia indotta dalla norma $L^p(P)$, $p\in[1,+\infty)$, e' equivalente a quella indotta dalla convergenza in probabilità, dunque $\{F_n, n\geq 1\}\subset C_q$ non può convergere in probabilità a una Gaussiana non degenere.

30

Ora torniamo al caso generale. Se $\{F_n, n\geq 1\}\subset \mathbb{D}^{1,2}$, allora sappiamo che se $\langle DF_n, -DL^{-1}F_n\rangle_H \xrightarrow[L^1(P)]{} \sigma^2$ si ha Gaussianità. Se inoltre $\{F_n, n\geq 1\}\subset \mathbb{D}^{1,4}$, allora basta guardare $Var(\langle DF_n, -DL^{-1}F_n\rangle_H) \xrightarrow[n]{} 0$. Se $\{F_n, n\geq 1\}\subset \mathbb{D}^{2,4}$, abbiamo la Poincaré.

Teorema (Disug. di Poincaré al II ordine) [Nourdin Peccati Reinert 2009]

Sia $F\in\mathbb{D}^{2,4}$, $\mathbb{E}[F]=0$ t.c. $\mathbb{E}[F^2]=\sigma^2>0$.
Se $N\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ si ha

Se F ha densità, ho la stima in d_{TV}.

$$d_W(F,N)\leq \frac{\sqrt{10}}{2\sigma}\,\mathbb{E}\left[\|D^2F\|_{op}^4\right]^{1/4}\,\mathbb{E}\left[\|DF\|_H^4\right]^{1/4},$$

dove $\|D^2F\|_{op}$ indica la norma operatoriale dell' operatore di Hilbert-Schmidt (aleatorio)

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H \\ f &\longmapsto \langle f, D^2F\rangle_H \end{aligned}$$

Inoltre, se F ha densità,

$$d_{TV}(F,N) \leq \frac{3}{\sigma^2} \mathbb{E}\left[\|D^2F\|_{op}^4\right]^{\frac{1}{4}} \mathbb{E}\left[\|DF\|_H^4\right]^{\frac{1}{4}}$$

Inoltre, $\mathbb{E}\left[\|D^2F\|_{op}^4\right] \leq \mathbb{E}\left[\|D^2F \otimes_1 D^2F\|_{H^{\otimes 2}}^2\right]$ □

Applicazione

Sia $\{B_t, t \geq 0\}$ un processo Gaussiano centrato con incrementi stazionari t.c. $\int_{\mathbb{R}} |\rho(x)|\, dx < +\infty$, dove

$$\rho(u-v) := \mathbb{E}\left[(B_{u+1} - B_u)(B_{v+1} - B_v)\right], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Assumiamo che $\rho \not\equiv 0$.

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2, $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, f non costante t.c.

$$\mathbb{E}\left[|f(N)|\right] < +\infty, \quad \mathbb{E}\left[|f''(N)|^4\right] < +\infty$$

Dalla Poincaré generalizzata, $\mathbb{E}\left[|f'(N)|^4\right] < +\infty$ e

$\mathbb{E}\left[|f(N)|^4\right] < +\infty$.

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\forall T > 0$

$$F_T := \frac{1}{\sqrt{T(b-a)}} \int_{aT}^{bT} \left(f(B_{u+1} - B_u) - \mathbb{E}[f(N)] \right) du$$

Teorema Per $T \to +\infty$

non ottimale

$$d_W\left(\frac{F_T}{\sqrt{\operatorname{Var} F_T}}, N \right) = O\left(T^{-1/4}\right)$$

$\begin{bmatrix} \text{Vidotto, 2019} \\ O\left(T^{-1/2}\right) \end{bmatrix}$

Se f e' simmetrica, allora $\exists \lim_{T \to +\infty} \operatorname{Var} F_T =: \sigma^2 \in (0, +\infty)$ e

$$F_T \xrightarrow[T \to +\infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Possiamo applicare il teorema al moto Browniano frazionario con indice di Hurst $H \in (0, \frac{1}{2}]$. Per $H = \frac{1}{2}$ ho il moto Browniano standard.

Il moto Browniano frazionario $B^H = \{ B^H_t, t \geq 0 \}$ e' un processo Gaussiano centrato continuo (che parte da zero) t.c.

$H \in (0,1)$

$$\mathbb{E}[B^H_t B^H_s] = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H} \right), \qquad t, s \geq 0$$

$H = \frac{1}{2} \mapsto$ moto Browniano

$H > \frac{1}{2} \mapsto$ incrementi positivamente correlati (long-range dependence)

$H < \frac{1}{2} \mapsto$ " negativamente " "dimostrazione"

1. La rappresentazione isonormale di B è:
per $s,t \geq 0$, definisco $X(\mathbb{1}_{[s,t]}) := B_t - B_s$
con prodotto scalare

$$s,t,u,v \geq 0, \quad \langle \mathbb{1}_{[s,t]}, \mathbb{1}_{[u,v]} \rangle_H := \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)(B_v - B_u)\right]$$

Definisco $H = \overline{\operatorname{span}\{\mathbb{1}_{[s,t]},\ s,t \geq 0\}}^{\|\cdot\|_H}$

2. $$\|DF_T\|_H^4 = \frac{1}{T^2(a-b)^2} \int_{[aT,bT]^4} f'(B_{u+1}-B_u) f'(B_{v+1}-B_v) \times$$
$$\times f'(B_{w+1}-B_w) f'(B_{z+1}-B_z) \rho(w-z) \rho(u-v)\, du\, dv\, dw\, dz$$

3. $$\mathbb{E}\left[\|DF_T\|_H^4\right] \leq \mathbb{E}\left[|f'(N)|^4\right] \left(\frac{1}{T} \int_{aT}^{bT} du \int_{\mathbb{R}} |\rho(x)|\, dx \right)^2 = O(1)$$

4. $$D^2 F_T \otimes_1 D^2 F_T = \frac{1}{T(b-a)} \int_{[aT,bT]^2} f''(B_{u+1}-B_u) f''(B_{v+1}-B_v) \times$$
$$\times \rho(u-v)\, \mathbb{1}_{[u,u+1]} \otimes \mathbb{1}_{[v,v+1]}\, du\, dv$$

5. $$\mathbb{E}\left[\|D^2 F_T \otimes_1 D^2 F_T\|^2_{H^{\otimes 2}}\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[f''(N)^4\right] \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}^3} |\rho(x)||\rho(y)||\rho(t)||\rho(x-y-t)|\, dx\, dy\, dt$$
$$= O(T^{-1})$$

□

[Peccati-Tudor, 2005]

Teorema Sia $d = 2, 3, \ldots$ e $q_1, \ldots, q_d \geq 1$ interi.
Consideriamo la successione di vettori aleatori

$$F_n = (F_{1,n}, \ldots, F_{d,n}) = \left(I_{q_1}(f_{1,n}), \ldots, I_{q_d}(f_{d,n}) \right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

con $f_{i,n} \in H^{\odot q_i}$. Sia $C \in M_d(\mathbb{R})$ simmetrica e definita non-negativa, e $N \sim N(0, C)$. Assumiamo che

$$\lim_n E[F_{i,n} F_{j,n}] = C(i,j) \quad \forall \; i,j \in \{1, \ldots, d\}.$$

Allora le seguenti sono equivalenti:

(a) $F_n \xrightarrow[n]{d} N$

(b) $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$, $F_{i,n} \xrightarrow[n]{d} N(0, C(i,i))$

Il teorema precedente ci permette di dimostrare l'asintotica normalità per una successione di S.a. che vive in una somma finita di caos di Wiener.

E se $\{F_n, n \geq 1\}$ non vive in una somma finita di caos di Wiener? Potremmo verificare se

$$\langle DF_n, -DL^{-1}F_n \rangle_H \xrightarrow[n]{L^1(P)} \sigma^2, \quad E[F_n^2] \xrightarrow[n]{} \sigma^2 > 0.$$

Questo spesso è difficile...

Teorema Sia $\{F_n, n\geq 1\} \subset L^2(\mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[F_n]=0$ $\forall n$,
Sia $F_n = \sum_{q=1}^{+\infty} I_q(f_{n,q})$, $f_{n,q} \in H^{\odot q}$, $q=1,2,\dots$, $n=1,2,\dots$

e' espansione caotica di F_n. Se

35

(a) $\forall q=1,2,\dots$, $q!\,\|f_n\|^2_{H^{\otimes q}} \xrightarrow[n]{} \sigma_q^2 \geq 0$

(b) $\sigma^2 := \sum_{q=1}^{+\infty} \sigma_q^2 < +\infty$

(c) $\forall q=2,3,\dots$, $r=1,\dots,q-1$ si ha

$$\| f_{n,q} \otimes_r f_{n,q} \|_{H^{\otimes 2q-2r}} \xrightarrow[n]{} 0$$

$I_q(f_{n,q})$ e' asintoticamente Gaussiano $\forall q=2,3,\dots$

(d) $\lim_{Q\to+\infty} \sup_{n\geq 1} \sum_{q=Q+1}^{\infty} q!\,\|f_n\|^2_{H^{\otimes q}} = 0$

allora $F_n \xrightarrow[n]{d} N \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

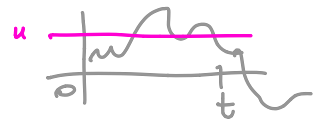
Applicazione (Zeri di processi aleatori) [Appunti di Nourdin]

Sia $B=\{B_t, t\in\mathbb{R}\}$ un processo $\overset{\text{Gaussiano}}{\text{continuo}}$, stazionario, centrato con covarianza $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ regolare

$$\mathbb{E}[X_t X_s] = r(t-s), \quad \forall t,s\in\mathbb{R}$$

Assumiamo $r(0)=1$, $-r''(0)>0$ (e' sempre ≥ 0)

Così $B_t \sim \mathcal{N}(0,1)$, e $r'(0)=0$ (r simmetrica).



Definizione Per $t>0$, $u\in\mathbb{R}$

$$N_t(u) := \#\{ s\in[0,t] : B_s = u \}$$

Formalmente,

$$N_t(u) = \int_{[0,t]} \delta_u(B_s)\,|B'_s|\,ds = \sqrt{-r''(0)} \int_{[0,t]} \delta_u(B_s)\,\frac{|B'_s|}{\sqrt{-r''(0)}}\,ds$$

varianza 1

Teorema (Formula di Rice)

$\forall t>0$, $u\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[N_t(u)] = \frac{t}{\pi}\sqrt{-r''(0)}\, e^{-u^2/2}$$

in particolare, $N_t(u) < +\infty$ q.c.

E' "facile" dimostrare che $N_t(u)\in L^2(\mathbb{P})$.

TLC per mezzo dell'espansione caotica

Si ha, $\forall t>0$, $u\in\mathbb{R}$,

$$N_t(u) = \sqrt{-r''(0)} \sum_{q=0}^{+\infty} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\lfloor q/2\rfloor} b_{q-2\ell}(u)\, a_{2\ell} \int_0^t H_{q-2\ell}(B_s)\, H_{2\ell}\!\left(\frac{B'_s}{\sqrt{-r''(0)}}\right) ds}_{}$$

$$= \sum_{q=0}^{+\infty} J_q(N_t(u))$$

con convergenza in $L^2(\mathbb{P})$, dove

$$b_m(u) = \frac{1}{m!\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} H_m(u) \quad \text{e} \quad a_{2\ell} = \frac{(-1)^{\ell+1}}{2^\ell \ell! \, (2\ell-1)} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Applicando Peccati-Tudor si ha, sotto altre ip di regolarità: $\forall u \in \mathbb{R}$,

1. $$\operatorname{Var}\left(J_q(N_t(u)) \right) \sim \sigma_q^2(u) \cdot t \,, \qquad t \to +\infty, \; q = 1, 2, \dots$$
2. $$\sum_{q=1}^{+\infty} \sigma_q^2(u) =: \sigma^2(u) \in (0, +\infty)$$
3. $$J_q(N_t(u))/\sqrt{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma_q^2(u)\right), \qquad q = 2, 3, \dots$$
4. $$\lim_{Q \to +\infty} \sup_t \sum_{q=Q+1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Var}\left(J_q(N_t(u)) \right)}{t} = 0$$

dunque

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \left[N_t(u) - \frac{t}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-r''(0)} \, e^{-u^2/2} \right] \xrightarrow[t \to +\infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(u)).$$